

Matematika szabályok
7. osztály

Sági Lajos

2016

Tartalomjegyzék

1. Számok és számolás – ismétlés	5
1.1. Számhalmazok	5
1.2. Törtek	6
1.2.1. Közöséges törtek	6
1.2.2. Tizedestörtek	8
1.3. Abszolútérték	10
1.4. Hatványok	10
1.5. Oszthatósági szabályok	10
1.6. LNKO, LKKT	11
1.7. Műveletek	12
1.8. Arány, arányosság	14
1.9. Százalékszámítás	14
1.10. Valószínűségszámítás	16
1.11. Racionális számokkal végzett műveletek	16
2. Számok, számolás – új anyag	17
2.1. SI előtétszavak	17
2.2. Hatványozás azonosságai	17
2.3. Az 1-nél nagyobb számok normálalakja	18
2.4. Kamatos kamat számítása	19
2.5. Statisztikai számítások	19
2.6. Osztó, többszörös	20
3. Függvény – új anyag	21
3.1. Függvény	22
4. Algebra – új anyag	26
4.1. Műveleti tulajdonságok	26
5. Geometria – ismétlés	30
5.1. Síkidomok	30

5.2. Háromszögek	31
5.3. Négyszögek	33
5.4. Testek	36
6. Geometria - új anyag	37
6.1. Egybevágósági transzformációk	37
6.2. Szögpárok	41
6.3. Síkidomok területe	42
6.4. A kör	44
6.5. Hasábok	46

Előszó

Hogy a tanulás egyszerűbb legyen, kigyűjtöttem a tankönyv szabályait ebbe a kis füzetbe. Szerepelnek benne azok is, amiket már a korábbi években tanultál, és vannak természetesen újak is.

A legfontosabb, hogy ezeket a szabályokat nem elég megtanulnod – bár azzal is lehet viszonylag jó jegyet szerezni – hanem értened is kell őket. Ha ebben gondjaid vannak keress meg, csak arra kérlek, hogy akkor gyere, ha tényleg nem érted. Ha még el sem olvastad, akkor ne kezd azzal, hogy nem érted. Akkor érdemes kérdezni, ha már tisztában vagy vele, hogy mit nem értesz. Amikor a *„Melyik részét nem érted?”* kérdésre azt a választ adnád, hogy *„Az egészet...”*, akkor az általában azt jelenti, hogy meg sem próbáltad megérteni. Próbálkozz meg vele először egyedül, és ha nem megy, segítek.

Igyekeztem - néhol még a hivatalos megfogalmazás ellenére is - érthető, köznapi nyelvet használni. Nem akartam, hogy a szavak értelmezésével bíbelődj, a matematika helyett. Emiatt lehet, hogy egy-két helyen nem ugyanazt találod, mint a tankönyvben. Értelmezd az enyémet, azért más, hogy könnyebben megértsd, és ha már érted, könnyen megtanulod a tankönyv szövegét. A feladatokat már az egyszerűbb megfogalmazás segítségével is meg tudod oldani.

Forgasd haszonnal!

Sok sikert, jó tanulást!

1. fejezet

Számok és számolás – ismétlés

1.1. Számhalmazok

1.1.1. meghatározás (Természetes számok)

A természetes számok halmazát a nulla és a pozitív egész számok alkotják.

Így jelöljük: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(Az $\mathbb{N}$ jelölés a natural = természetes szó rövidítése.)

Ez a számhalmaz, mint a neve is mutatja egy természetes szükségletből alakult ki: meg kellett számolni a dolgokat.

Figyeld meg, hogy ezek után mindig fogunk találni egy műveletet, ami egy kicsivel nagyobb számhalmazt kíván, és így egyre több és nagyobb halmazunk lesz.

A művelet, ami kivezet a természetes számok halmazából, a kivonás. Amíg az első szám nagyobb, mint a második (kisebbítendő $>$ kivonandó) addig nincs probléma. $3 - 2 = 1$ és még mindig a természetes számok halmazában vagyunk. (A $+1$ természetes szám.)

Fordított esetben viszont már nem elég a természetes számok halmaza a művelet elvégzéséhez. Szükség van negatív számokra is. $2 - 3 = -1$

1.1.2. meghatározás (Egész számok)

Egész számoknak nevezzük az olyan számokat, amelyek felírhatók két természetes szám különbségeként. (kivonásaként...) Így jelöljük:

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

(Az $\mathbb{Z}$ jelölés a zahlen = egész szó rövidítése.)

Az egész számok halmazát tehát a negatív egész számok, a pozitív egész számok, és a nulla alkotják.

Az egész számok halmazából kivezető művelet az osztás. Itt sincs probléma addig, amíg az osztandó többszöröse az osztónak. Az eredmény ekkor

egész szám. $8 : 4 = 2$ Ha nem az, akkor valamilyen törtszámot kapunk.
 $8 : 5 = \frac{8}{5}$

A törtekkel a racionális számok halmazába léptünk át, ahol nem lehet felsorolásként megadni a számhalmaz elemeit, mert két szám közötti távolságot megfelelve, mindig tudunk közéjük egy harmadikat mondani.

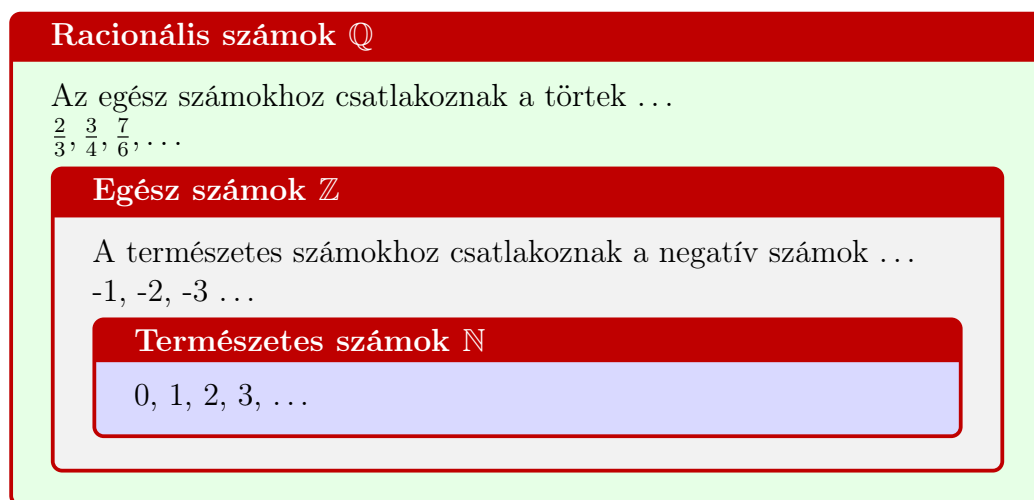
1.1.3. meghatározás (Racionális számok)

Racionális számoknak nevezzük az olyan számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, vagyis törtalakban. (A nevező nem lehet nulla!) Így jelöljük:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots, -2, \dots, -\frac{3}{2}, \dots, -1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1, \dots, \frac{3}{2}, \dots, 2, \dots \right\}$$

(Az $\mathbb{Q}$ jelölés a quotient = hányados szó rövidítése.)

A számhalmazokat így is ábrázolhatjuk (a legkisebb halmaztól indulj):



1.2. Törtek

A racionális számokat felírhatjuk törték formájában is. A törték tulajdonképpen egy osztást fejeznek ki, mivel a racionális számokról ($\mathbb{Q}$) azt mondtuk, hogy felírhatók két szám hányadosaként. (Osztásként...) A törtéknek több fajtájuk is van, először tekintsük át ezeket.

1.2.1. Közöséges törték

A közöséges törték számlálóból, nevezőből és törtvonalból állnak. A $\frac{3}{5}$ -nél a hármas a számláló, az ötös a nevező és a kettő között láthatod a törtvonalat, ami az osztást fejezi ki.

A nevező azt mutatja meg, hogy hány részre osztottuk az egészet, a számláló pedig azt, hogy hány részt vettünk ezekből. A $\frac{3}{5}$ -nél tehát az egészet öt részre osztottuk, és ebből az öt részből hármat vettünk.

1.2.1. meghatározás (Törtek nagysága)

A tört akkor **nagyobb 1-nél**, ha a számlálója nagyobb a nevezőjénél. (Ilyenkor felírható **vegyesszám** alakban is, vagy ha a számláló többszöröse a nevezőnek, akkor egész számként!)

Például: $\frac{12}{8} = 1\frac{4}{8}$ vegyesszám alak, illetve $\frac{16}{8} = 2$ egész számként.

A tört akkor **egyenlő 1-gyel**, ha a számlálója egyenlő a nevezőjével.

Például: $\frac{8}{8} = 1$

A tört akkor **kisebb 1-nél**, ha a számlálója kisebb a nevezőjénél.

Például: $\frac{6}{8}$

1.2.2. meghatározás (Reciprok)

Egy nullától különböző szám reciproka az a szám, amivel ha megszorozzuk, az eredmény egy lesz.

Például: a $\frac{2}{3}$ reciproka a $\frac{3}{2}$, mert $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$

1.2.3. meghatározás (Műveletek törtekkel)

Ezek alaplóműveletek, mindenképpen tudnod kell őket!

1. Bővítés

A tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a számmal szorozzuk. (Ez a szám nem lehet nulla.)

Például: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

Itt 2-vel bővítettünk. A tört értéke a bővítéssel nem változik.

2. Egyszerűsítés

A tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a számmal osztjuk. (A nullával való osztás nincs értelmezve!)

Például: $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Itt 4-gyel egyszerűsítettünk, a tört értéke az egyszerűsítéssel nem változik.

3. Közös nevezőre hozás

A törteket úgy egyszerűsítjük, vagy bővítjük, hogy a nevezőjük egyforma legyen.

Például: $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{5}$ közös nevezőre hozva $\frac{10}{15}$ és $\frac{9}{15}$

4. Összeadás és kivonás

Egyforma nevezőjű törtknél a számlálókat kell összeadni, ha nem egyforma a nevező, akkor előtte közös nevezőre kell hozni a törtet.

5. Szorzás

A számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel kell összeszorozni.

$$\text{Például: } \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12}$$

6. Osztás

A törtet megszorozzuk a reciprokával.

$$\text{Például: } \frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{9}{8}$$

Megjegyzések:

Ilyet nem szabad a matematikában mondani, de a reciproknál tulajdonképpen megcseréljük a számlálót a nevezővel.

A nulla reciproka nincs értelmezve, mert nincs olyan szám, amivel megszorozva a nullát, egyet kapnánk eredményül. (Ráadásul így a nulla a nevezőbe kerülne, és a nullával való osztás nincs értelmezve!)

Egész számok reciproka $\frac{1}{\text{az egész szám}}$, és ez fordítva is igaz.

Például: 6 reciproka az $\frac{1}{6}$, és viszont...

Vegyesszámok reciprokát úgy kapjuk meg, hogy közösleges törtté alakítjuk.

Például: $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, ennek a reciproka $\frac{4}{11}$

Közösleges törtet úgy hasonlítunk össze, hogy közös nevezőre hozzuk őket, és ezután amelyiknek a számlálója nagyobb, az a nagyobb. (Negatív számnál az a kisebb! Ha nem érted miért, nézd meg a számegyenesen!)

Például: $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$, illetve $-\frac{3}{5} < -\frac{2}{5}$

Ha két tört számlálója egyforma, akkor az a nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb. (Negatív számnál az a kisebb!)

$\frac{3}{5} > \frac{3}{6}$, illetve $-\frac{3}{5} < -\frac{3}{6}$

1.2.2. Tizedestörtek

A tizedestörtek azt a számot jelentik, amit a közösleges törtben szereplő osztás elvégzése után kapunk. Az eddigi helyiértéktáblázatot kell folytatni, hogy a számokat ábrázolni tudjuk.

A tizedesvessző előtti részt a szám egészrészének, a tizedesvessző utánit a törtrészének nevezzük. A szám kimondásakor a tizedesvessző helyére az

„egész” szót mondjuk, a szám végén pedig a törtész utolsó számjegyének helyiértékét.

Ezres	Százas	Tízes	egyes	,	tized	század	ezred
3	2	4	3	,	3	2	5

Kimondva:

háromezer-kétszáznegyvenhárom egész háromszázhuszonöt ezred

1.2.4. meghatározás (Műveletek tizedestörtekkel)

Ezek alapműveletek, mindenképpen tudnod kell!

1. Bővítés, egyszerűsítés

A tizedestört értéke nem változik, ha a végére nullákat írunk, vagy vesszünk el!

Például: $3,2 = 3,20 = 3,200$ (bővítés), $4,5000 = 4,500 = 4,50 = 4,5$ (egyszerűsítés)

2. Összeadás, kivonás

Ugyanúgy végezzük, mint az egész számokkal, a felírásnál figyelj arra, hogy a tizedesvesszők egymás alá kerüljenek. (Ha az egyik szám „rövidebb”, mint a másik, akkor nullákkal pótolhatod az üres helyeket.)

3. Szorzás

Ugyanúgy végezzük, mint az egész számoknál, a tizedesvesszőt figyelmen kívül hagyjuk. A eredmény végéről annyi tizedesjegyet jelölünk, amennyi a két számban összesen volt.

4. Osztás

Szorozzuk tízzel mindkét számot addig, míg egészek nem lesznek. (A tizedesvesszőt jobbra vesszük...) Ezután az egész számoknál megszokott módon elvégezzük az osztást.

Például: Ha 3,4-et el szeretnénk osztani 2,25-el, akkor kétszer kell mindkét számot megszorozni tízzel, mert az első szorzás után a 3,4 már egész szám (34), de a 2,25 még csak 22,5 lenne, az pedig nem egész szám. A második szorzás után 340-et kell osztanunk 225-tel.

Megjegyzés: két tizedestört közül az a nagyobb, amelyiknek az egészrésze nagyobb. Ha az egészrész egyforma, akkor a tizedestörteket úgy bővítjük, hogy a törtész azonos helyiértékű legyen, majd a törtészeket hasonlítjuk össze.

Például: $3,45 > 2,75$, mert az egészrésze nagyobb ($3 > 2$).

A 2,035 és a 2,1 összehasonlításához bővítés szükséges: $2,1 = 2,100$, és így $2,035 < 2,100$ (mert $035 < 100$).

1.3. Abszolútérték

A szám abszolútértéke, a számegyenesen a nullától való távolságát jelenti.

1.3.1. meghatározás (Ellentett)

Egy szám ellentettje az a szám, amit ha hozzáadunk, az eredmény nulla lesz. (Ez tulajdonképpen a szám (-1) -szerese.)

1.3.2. meghatározás (A számok abszolútértéke)

*A szám abszolútértéke önmaga, ha a szám pozitív, vagy nulla, és ellentettje, ha a szám negatív. Az abszolútértéket egyenes zárójellel jelöljük: $|3|$
Például: $|-3| = +3$ (negatív), $|0| = 0$ (nulla), $|+5| = +5$ (pozitív)*

Vedd észre, hogy az abszolútérték csak pozitív szám vagy nulla lehet (mivel tulajdonképpen egy távolságot jelöl), és hogy egy számnak és ellentettjének megegyezik az abszolútértéke.

Például: $|4| = +4$ és $|-4| = +4$, Tehát -4 -nek és 4 -nek is ugyanaz az abszolútértéke: $+4$.

1.4. Hatványok

1.4.1. meghatározás (Hatvány)

Egy szám hatványa egy szorzat. A hatványkitevő mutatja meg, hogy hányszor szorozzuk meg a számot saját magával. A számot magát hatványalapnak hívjuk.

Például: 4^3 (a hatványalap a 4, a kitevő a 3), ugyanez szorzat alakjában: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Megállapodás szerint minden szám nulladik hatványa 1, kivéve a nullát, ez a hatvány ugyanis nincs értelmezve. Minden szám első hatványa önmaga.

Megjegyzés: a negatív számok hatványainál figyelni kell arra, hogy hány számot szoroztál össze: a páratlan hatványok negatívak lesznek, a párosak pozitívak. (Magyarázat: $- \cdot - = +$ és $- \cdot + = -$)

1.5. Oszthatósági szabályok

NULLÁVAL való osztás nincs értelmezve!

(Viszont a nullát bármilyen számmal eloszthatjuk.)

EGGYEL és önmagával minden szám osztható.

KETTŐVEL oszthatók a páros számok.

HÁROMMAL oszthatók azok a számok, amelyek számjegyeinek összege osztható hárommal.

NÉGGYEL oszthatók azok a számok, melyeknek utolsó két számjegyéből álló szám osztható négyvel.

ÖTTEL oszthatók azok a számok, amelyek 0-ra vagy 5-re végződnek.

HATTAL oszthatók azok a számok, amelyek 2-vel és 3-mal is oszthatók.

HÉTTTEL oszthatók azok a számok, amelyek utolsó számjegyének kétszeresét kivonva a többi számjegy alkotta számból, az eredmény osztható héttel. (Az eljárás többször ismételhető, ha túl nagy az eredmény.)

NYOLCCAL oszthatók azok a számok, amelyek utolsó három számjegyéből álló szám osztható 8-cal. (Egy vagy két számjegynél a szorzótábla segít!)

KILENCCEL oszthatók azok a számok, amelyek számjegyeinek összege osztható 9-cel.

TÍZZEL oszthatók a 0-ra végződő számok.

Bővebb magyarázatot, példákkal kiegészítve a [weblapomon](#) találhatsz!

1.6. LNKO, LKKT

1.6.1. meghatározás (Prímszám)

Prímszámnak vagy másik nevén törzsszámnak nevezzük azt a természetes számot, aminek pontosan két osztója van a természetes számok körében: az 1 és önmaga.

1.6.2. meghatározás (Összetett szám)

Azok a nullától különböző természetes számok, amelyeknek kettőnél több természetes szám osztója van.

Megjegyzések:

Egyetlen páros prím van, a 2.

Az 1-nek csak egyetlen osztója van a természetes számok körében: önmaga. Ezért az 1 nem prímszám és nem is összetett szám.

A nullának minden természetes szám az osztója, ezért a nulla minden természetes számnak többszöröse. A nulla nem osztója egyetlen számnak sem, mert a nullával való osztás nincs értelmezve. Ezért a nullát nem tekintjük sem prímszámnak, sem összetett számnak.

1.6.3. meghatározás (A számelmélet alaptétele)

Minden összetett szám felbontható prímszámok szorzatára, és ez a felbontás a sorrendtől eltekintve csak egyféle lehet.

1.6.4. meghatározás (Relatív prímelek)

Két számot relatív prímnek nevezünk, ha prímtényezői felbontásukban nincs közös prímszám.

1.6.5. meghatározás (Legnagyobb közös osztó)

Két vagy több szám legnagyobb közös osztója, a számok mindegyikének osztója és mindegyik közös osztónak többszöröse.

Előállítása: a számok prímtényezői közül kiválasztjuk a közöset és azokat az előforduló legkisebb hatványaikra emelve összeszorozzuk. (A legkisebb hatvány lehet az első is!)

1.6.6. meghatározás (Legkisebb közös többszörös)

Két vagy több szám legkisebb közös többszöröse, a számok mindegyikének többszöröse és mindegyik közös többszörösnek osztója.

Előállítása: a számok prímtényezői közül kiválasztjuk az összes különbözőt és azokat az előforduló legnagyobb hatványaikra emelve összeszorozzuk.

1.7. Műveletek**1.7.1. meghatározás** (Műveletek törtekkel és egész számokkal)

Ezek alapműveletek, mindenképpen tudnod kell!

1. Összeadás, kivonás

Az összeadást és a kivonást úgy végezzük el, hogy az egész számot átalakítjuk törtté, és így a műveletet két törttel végezzük el. Figyeld oda arra, hogy az egész szám átváltása után egyezzenek a nevezők! (Lásd: az 1.2.3 szabályt!)

Például: $1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ (mert $1 = \frac{3}{3}$), vagy kivonás: $1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

2. Szorzás

Törtet egész számmal úgy szorzunk, hogy a számlálóját megszorozzuk, a nevezőjét változatlanul hagyjuk.

Például: $\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{6}{8}$

3. Osztás

Törtet egész számmal úgy osztunk, hogy a nevezőjét megszorozzuk a számmal, a számlálóját pedig változatlanul hagyjuk.

Például: $\frac{2}{3} : 2 = \frac{2}{6}$

Megjegyzések:

Ha szerencséd van, és a számok megfelelőek, akkor másképpen is elvégezheted a szorzást és az osztást.

Szorzásnál ha osztható, akkor a tört nevezőjét eloszthatod a számmal.

Például: $\frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{5}{3}$

Osztásnál pedig, ha osztható, akkor a számlálót eloszthatod a számmal.

Például: $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$

Ha egy számot megszorzunk egy törttel, akkor tulajdonképpen a tört részét számítjuk ki, vagyis a $3 \cdot \frac{2}{5}$ nem más, mint a $3 \frac{2}{5}$ részének a kiszámítása. (Törtre is igaz!)

1.7.2. meghatározás (Műveletek sorrendje)

Ezeket azért kell tudnod, mert a rossz sorrendben elvégzett műveletsor hibás eredményt ad!

1. Zárójel

Először mindig a zárójelben lévő műveleteket végezzük el, az eredményt a zárójeles kifejezés helyett írjuk le. Ha a zárójelben több művelet van, akkor a zárójelen belül is betartjuk ezt és a többi pontban leírt sorrendet.

Például: $92 + (13 - 5) = x$ a zárójelben lévő műveletet elvégezve:

$92 + 8 = x$, mert $13 - 5 = 8$.

2. Hatványozás

Ha nincs zárójel, akkor a hatványozás az első. Mindegy, hogy azért nincs, mert eredetileg sem volt, vagy azért, mert már az 1. pont szerint átalakítottuk.

3. Szorzás, osztás

Ha a hatványok értékét már kiszámoltuk, vagy ha nem voltak hatványok.

4. Összeadás, kivonás

Végül az összeadásokat és a kivonásokat végezzük el.

5. Balról jobbra

Ha semmilyen más szabály nincs már, vagy csupa egyenrangú műveletből áll a feladat, akkor ezeket balról jobbra haladva sorban végezzük el.

1.8. Arány, arányosság

1.8.1. meghatározás (Arány)

Az arány két szám hányadosa. Gyakran nem számoljuk ki az értékét, inkább tört, vagy osztás formájában tüntetjük fel.

Például: viszonylag ritkán mondjuk, hogy két szám aránya 0,5. Inkább azt mondjuk, hogy $\frac{1}{2}$, vagy $1 : 2$. Mindkettőt úgy kell kimondani, hogy „egy aránylik a kettőhöz”. Az arányra ugyanazok a szabályok vonatkoznak, mint a törtek egyszerűsítésére vagy bővítésére, vagyis $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (Lásd a az 1.2.3 szabályt.)

1.8.2. meghatározás (Egyenes arányosság)

Akkor mondjuk, hogy két változó mennyiség egyenesen arányos, ha az egyik változásakor a másik is ugyanúgy változik.

Például: ha az egyiket kétszeresére növelem, akkor a másik is kétszeresére nő. Ilyenkor a két mennyiség hányadosa állandó.

1.8.3. meghatározás (Fordított arányosság)

Akkor mondjuk, hogy két változó mennyiség fordítottan arányos, ha az egyik változásakor a másik éppen ellenkezőleg változik.

Például: ha az egyiket háromszorosára növelem, akkor a másik a harmadrésére csökken. Pontosan fogalmazva: a reciprokszorosára nő. (A 3 reciproka az $\frac{1}{3}$, tehát az „egyharmadszorosára nő”, ami azt jelenti, hogy a harmadára csökken.) Fordított arányosságnál a két mennyiség szorzata az állandó!

1.9. Százalékszámítás

1.9.1. meghatározás (Százalék)

A százalékos formát törtrészek összehasonlítására találták ki. Egy mennyiség valahány századrészt jelent. Egy szám 1%-a az $\frac{1}{100}$ -át, a 23%-a a $\frac{23}{100}$ -át.

Megjegyzés: ezért nincs értelme a 3% kifejezésnek, ha nincs ott, hogy minek a 3%-a. Egy mondat, hogy biztos megérted: Ha boltba kell menned és azt mondják: „Hozz kettőt!”, azonnal megkérdezed, hogy miből kell kettő? Ugyanígy itt is, ha azt mondják, hogy 6%, akkor azonnal meg kell kérdezni, hogy „Minek a 6%-a?” Ugyanis 100-nak a 6%-a 6, de 500-nak a 6%-a már nem 6, hanem 30.

1.9.2. meghatározás (A százalék fogalmai)

*Az a szám, aminek ki akarjuk számolni valahány százalékát, az **alap**.*

***Százaléklábnak** nevezzük azt, hogy hány százalékát akarjuk kiszámolni.*

*Az eredeti szám valahány százaléka pedig a **százalékérték**.*

Táblázatosan:

Alap	Százalékláb	Százalékérték
500	1%	5

Mert 500-nak az $\frac{1}{100}$ -ad része egyenlő 5-tel.

1.9.3. meghatározás (Százalék megadás más formában)

Mivel a százalék egy törtrészt jelent, másféle formában is megadhatjuk:

Valaminek a 75%-a tulajdonképpen a $\frac{3}{4}$ -e, mert egyszerűsítés után $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$. Tehát közönséges törttel is kifejezhetjük.

Ha közönséges törttel kifejezhetjük, akkor kifejezhetjük tizedes törttel is, leg-egyszerűbben két tizedesjegyre számolva. $75\% = \frac{75}{100} = 0,75$.

Megjegyzések:

Vedd észre, hogy a 100% maga az alap, ugyanígy törtben kifejezve az 1 egész is, és tizedestörtben megadva, az 1,00 is.

Természetesen ennél nagyobb értéke is lehet a százaléknak, ha például valaminek az ára 20%-al megemelkedik, az az eredeti ár 120%-a lesz. Törtben kifejezve $1\frac{20}{100}$, vagy tizedestörtben 1,20.

1.9.4. meghatározás (Számítások)

Ezeknél a százaléklábat mindig tizedestörteként adjuk meg!

1. Százalékérték:

Az alapot meg kell szorozni a százaléklábbal.

2. Százalékláb:

A százalékértéket el kell osztani az alappal.

3. Alap:

A százalékértéket el kell osztani a százaléklábbal!

Megjegyzések: Van erre egy kis ábra is, ami segít megjegyezni a műveleteket. Azt, hogy melyik betű hol van a rajzon, azt úgy tudod megjegyezni, hogy az érték, az az „É” betű, és az ég fönt van. Az „A” a ház alapja, és az lent van, az „L” a láb, és az is lent van. Ezután mindig letöröljük azt a betűt, amelyik mennyiséget ki akarjuk számolni, és a műveletet elvégezzük.

Vagyis ha a százalékérték kell: $\text{É} = \text{A} \cdot \text{L}$, ha a százalékláb kell: $\text{L} = \text{É} : \text{A}$, és ha az alap kell: $\text{A} = \text{É} : \text{L}$ (Bővebb magyarázat és mintapélda [a weblapon.](#))



1.10. Valószínűségszámítás

A valószínűségi kísérleteknél gondolj a dobókocka dobálására, ezt fogom példának hozni.

1.10.1. meghatározás (Gyakoriság)

Ez a szám azt mondja meg, hogy az elvégzett kísérletek során, hányszor lett kedvező a kísérlet eredménye.

Például: a hatos dobás gyakorisága 4 volt, akkor az azt jelenti, hogy az elvégzett kísérletek során 4-szer dobtunk hatost. (Most nem fontos, hogy hányszor dobtunk.)

1.10.2. meghatározás (Relatív gyakoriság)

Az előbbi értéket vesszük elő, a gyakoriságot, de most elosztjuk az elvégzett kísérletek számával. (Most fontos, hogy hányszor dobtunk.)

Például: 25 dobás esetén a relatív gyakoriság $4 : 25 = 0,16$

1.10.3. meghatározás (Valószínűség)

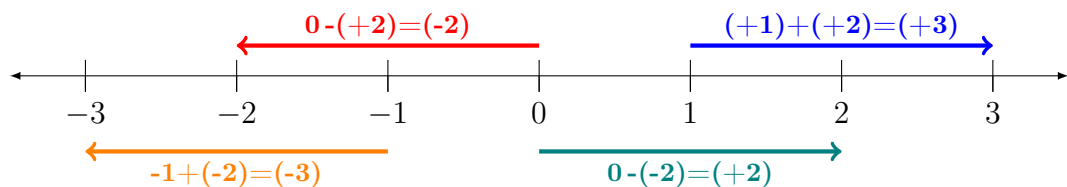
*A relatív gyakoriság **nagy számú (több ezer)** kísérlet esetén a tapasztalat szerint megközelíti a valószínűséget. Mivel mi nem vagyunk tudósok, mondhatjuk, hogy a valószínűség $\approx 0,16$. ($A \approx$ jel körülbelüli értéket jelent.)*

1.11. Racionális számokkal végzett műveletek

1.11.1. meghatározás (Műveletek előjeles számokkal)

Három egyszerű szabály van, és a harmadik a második ellentéte.

- 1. A nulla hozzáadása vagy kivonása nem változtat a számon.*
- 2. Pozitív szám hozzáadása a szám növelését jelenti, jobbra haladunk a számegyenesen, elvétele a csökkentését, balra haladunk.*
- 3. Negatív szám hozzáadása a szám csökkentése, balra haladunk, elvétele a szám növelése, jobbra haladunk.*



Gyakorlási lehetőség a [weblapon](#)!

2. fejezet

Számok, számolás – új anyag

2.1. SI előtétszavak

A nemzetközi mértékegységrendszer (SI = System International) a mértékegységekhez szorozóként a tíz hatványait illeszti. A legfontosabbak a táblázatban olvashatók.

Több dologra is figyelned kell. Az egyik, hogy ezek az előtétszavak ugyan megegyeznek az informatikában használtakkal, de nem ugyanazokat a számokat jelentik. Erről külön tanulsz informatika órán.

A másik, hogy a *-gal jelzett előtétszavakat nem minden mértékegység mellett használjuk. (Például: van hektoliter, de nincs hektométer.)

A harmadik, hogy nem szabad ezeket összekeverned a mértékegységekkel. (Például a tonna = 1 000 000 (egymillió) gramm, mégsem hívjuk megagrammnak.)

giga	G	1 000 000 000	milliárd
mega	M	1 000 000	millió
kilo	k	1 000	ezer
hekto*	h	100	száz
deka*	da	10	tíz
deci*	d	0,1	tized
centi*	c	0,01	század
milli	m	0,001	ezred
mikro	μ	0,000 1	tízezred
nano	μ	0,000 01	százezred

2.2. Hatványozás azonosságai

A hatványozás alapfogalmait már ismered, most meg kell tanulni, hogy hogyan számolunk azokkal a hatványokkal, melyeknek az alapjuk egyforma. (Ha az alapfogalmakkal gond van, lásd az [1.4.1!](#))

Hatványok szorzása**Azonos alap:**

$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ azonos alapú hatványok szorzásakor a kitevőket összeadjuk, az alapot változatlanul hagyjuk.

Általánosan: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Azonos kitevő:

$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3$ azonos kitevőjű hatványok szorzásakor az alapokat összeszorozzuk a kitevőt változatlanul hagyjuk. Ha visszafelé olvasod, ez egyben a *szorzat hatványozásának szabálya is*.

Általánosan: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

Hatványok osztása**Azonos alap:**

$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$ azonos alapú hatványok osztásakor a kitevőket kivonjuk, az alapot változatlanul hagyjuk. Akkor is, ha a kitevő negatív szám lesz. A negatív hatványról később fogsz tanulni. (Tört helyett osztást is írhatunk $2^5 : 2^3$)

Általánosan: $a^m : a^n = a^{m-n}$, vagy törtként: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Azonos kitevő:

$\frac{2^3}{5^3} = (\frac{2}{5})^3$ azonos kitevőjű hatványok osztásakor az alapokat elosztjuk majd az hányadost hatványozzuk. Természetesen osztással is írhatjuk $2^3 : 5^3 = (2 : 5)^3$ Ha visszafelé olvasod, ez egyben a *tört hatványozásának szabálya is*.

Általánosan: $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$, vagy osztással: $a^m : b^m = (a : b)^m$

Hatvány hatványozása

$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ hatvány hatványozásakor a két kitevőt összeszorozzuk, az alapot változatlanul hagyjuk.

Általánosan: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

2.3. Az 1-nél nagyobb számok normálalakja**2.3.1. meghatározás**

A nagy számok felírásánál könnyebb az olvasás és az értelmezés, ha a számokat normálalakban írjuk fel. Ez egy kéttényezős szorzatot jelent, aminek az

első tényezője egy $1 < a < 10$ szám, a másik tényezője pedig 10-nek valamely pozitív egész hatványa.

Például: az 150 000 000 000 szám normálalakján $1,5 \cdot 10^{11}$ azonnal látszik, hogy nagyobb, mint a 16 000 000 000 szám, aminek a normálalakja $1,6 \cdot 10^{10}$. (Elég csak megnézni a 10 hatványát.)

2.4. Kamatos kamat számítása

Erre a műveletre akkor van szükségünk, ha egy mennyiség újra és újra növekszik ugyanakkora százalékkal. (Gondolj bele, az első növekedés után már nem az eredeti, hanem a megnövelt összeget kell tovább növelni.)

2.4.1. meghatározás (Kamatos kamat)

Kamatos kamat számításánál az alapot a százalékláb annyiadik hatványával szorozzuk, ahány ciklust kell számolnunk.

Például: 100 Ft 23%-os kamata 3 ciklus (például év) után: $100 \cdot (0,23)^3$

2.5. Statisztikai számítások

Ebben a fejezetben néhány idegen szóval ismerkedünk meg, amelyek segítenek az adatokat helyesen értelmezni. Például: ha egy osztály egyik tanulója, egy ötöst és egy egyest szerez, egy másik tanuló egy kettést és egy négyest, a harmadik pedig két darab hármast, akkor mindhármuk tanulmányi átlaga hármas. Ha azonban belegondolsz, az első tanuló valószínűleg véletlenül egy órára nem tanult, a második valószínűleg nem egyformán készül, míg a harmadik egy lelkiismeretes, de gyenge képességű diák lehet. Ez a tanulmányi átlagból nem látszik, mert az egyforma. Ezt a *szóródásból* tudhatjuk meg.

2.5.1. meghatározás (Mennyiségi sor)

Mennyiségi sornak nevezzük az adatok növekvő sorrendbe rendezett halmazát.

Például: 16, 17, 17, 20, 23, 30, 30

2.5.2. meghatározás (Medián)

Mediánnak nevezzük a mennyiségi sorba rendezett számok közül a középsőt. (Ha páros az elemszám, akkor a két középső érték átlaga a medián.)

Például: 16, 17, 17, 20, 23, 30, 30. Most a medián a 20.

2.5.3. meghatározás (Szóródás)

A szóródás terjedelme a legnagyobb és legkisebb érték különbsége.

Például: 16, 17, 17, 20, 23, 30, 30 esetén a szóródás $30 - 16 = 14$.

2.5.4. meghatározás (Osztályozás, megoszlás)

Az osztályozás során az adatokat általunk kitalált csoportokba rendezzük. Fontos, hogy minden adat bekerüljön egy osztályba, és egy adat csak egy osztályba tartozhasson. Az osztályozás után beszélhetünk a megoszlásról.

Például: 16, 17, 17, 20, 23, 30, 30

Tegyük fel, hogy ez a mennyiségi sor az alkalmazottak számát jelenti különböző munkahelyeken. Ekkor kitalálhatunk mondjuk három csoportot. A táblázat harmadik sorában láthatod a megoszlásokat: százalékkal fejeztem ki, hogy a 7 adatból hány került abba a csoportba.

20-nál kevesebb alk.	legalább 20, de legfeljebb alk.25	25-nél több alk.
16, 17, 17	20, 23	30, 30
$3 : 7 \approx 0,43 \rightarrow 43\%$	$2 : 7 \approx 0,29 \rightarrow 29\%$	$2 : 7 \approx 0,29 \rightarrow 29\%$

2.5.5. meghatározás (Módusz)

A módusz az adatok között leggyakrabban előforduló érték. Több módusz is lehet, ha előfordulásuk megegyezik és ez a legtöbb előfordulás.

Például: 16, 17, 17, 20, 23, 30, 30 esetén két módusz is van: a 17 és a 30, mert kétszer fordulnak elő, és ez a legtöbb előfordulás.

2.6. Osztó, többszörös

2.6.1. meghatározás (Osztó és többszörös)

Akkor mondjuk, hogy egy természetes szám osztója egy másiknak, ha igaz rájuk, hogy: $b = k \cdot a$, ahol „a” és „b” a két szám, „k” pedig egy harmadik természetes szám. Egyszerűbben fogalmazva akkor mondjuk, hogy b szám többszöröse a-nak, ha van egy olyan k szám, amivel a-t megszorozva b-t kapunk. Ha b többszöröse a-nak, akkor a és k osztója b-nek.

3. fejezet

Függvény – új anyag

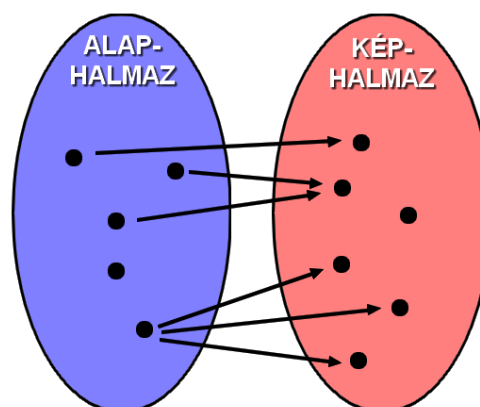
3.0.1. meghatározás (Elnevezések)

Alapfogalmak azok, amiket már nem tudunk egyszerűbb fogalmakkal meghatározni, megmagyarázni. Ilyen a **halmaz** (valamilyen közös tulajdonsággal rendelkező dolgok), az **elem** (ami tagja egy halmaznak), és az, hogy **beletartozik** a halmazba. Ezt a halmaz közös tulajdonsága alapján döntjük el.

Például: halmaz lehet a fiú, és a lány. Az elemek lehetnek az osztályban tanuló gyerekek, a tulajdonság pedig, ami alapján valamelyik halmazba tartoznak, a nemük (fiú – lány).

3.0.2. meghatározás (Hozzárendelés, reláció)

Két halmaz között valamilyen szabállyal kapcsolatot teremthetünk úgy, hogy megmondjuk, hogy az egyik halmaz eleméhez melyik tartozzon a másikkból. Általános iskolában ez a kapcsolat, **reláció** is alapfogalom. Például: a fiúk halmazából mindegyik elemhez (fiúhoz) tartozzon a lányok halmazából az az elem (lány), akivel táncolt a buliban. Ekkor az alaphalmaz a fiúk, a képhalmaz a lányok, a hozzárendelés szabálya pedig: „táncolt vele”.



3.0.3. meghatározás (Alaphalmaz, képhalmaz)

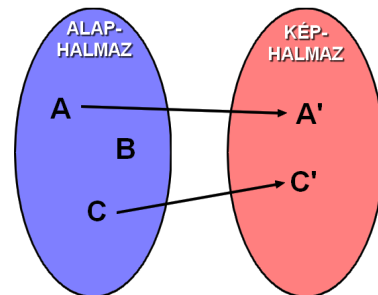
A hozzárendelés első halmaza az **alaphalmaz**, amihez rendeljük a második halmaz, a **képhalmaz** elemeit. Az alaphalmazbeli „a” elemhez a képhalmazból hozzárendelt „b” elem az „a” **elem képe**. (Vigyázz, fontos a sorrend: nem

felcserélhető, hogy melyikhez rendelünk, és melyiket rendeljük hozzá.)
 Például: az előző példában, ahol a „táncolt vele” volt a hozzárendelés, a fiúkhoz rendeltük a lányokat. A következő meghatározásban látni fogod, hogy ez miért fontos.

3.0.4. meghatározás (Egyértelmű hozzárendelés)

Akkor egyértelmű egy hozzárendelés, ha minden alaphalmazbeli elemnek legfeljebb egy képe van. (Lehet, hogy egy sincs, de egynél több nem lehet.)

Például: Egyértelmű a házastárs hozzárendelés, mert olyan előfordulhat, hogy valakinek nincs házastársa (az elemnek nincs képe), de ha van, akkor csak egy van. Az előző példa nem egyértelmű hozzárendelés, mert egy fiúval több lány is táncolhatott.



3.1. Függvény

3.1.1. meghatározás (Függvény)

Ha a hozzárendelésünk nem legfeljebb, hanem pontosan egy elemet rendel az alaphalmaz elemeihez (tehát kötelező, hogy minden elemnek legyen képe, és csak egy legyen), függvényről beszélünk.

3.1.2. meghatározás (Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés)

A függvény másik megfogalmazása: Ha egy egyértelmű hozzárendelés fordítottja is egyértelmű, akkor kölcsönösen egyértelműnek nevezzük.

Például: ha egy számhoz hozzárendeljük a kétszeresét. Egy számnak csak egyetlen szám lehet a kétszerese, és bármelyik számról egyértelműen meg tudjuk mondani, hogy melyiknek a kétszerese, és mindegyik számnak van kétszerese.

3.1.3. meghatározás (Értelmezési tartomány)

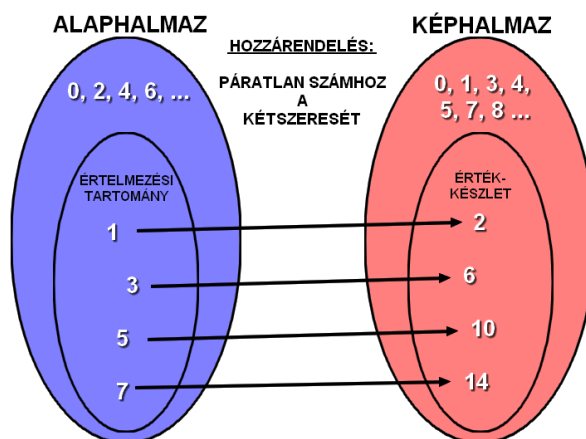
Most kiválasztjuk az alaphalmazból azokat az elemeket, amelyeknek van képe a képhalmazban, és ezeket együtt a függvény értelmezési tartományának nevezzük. Ez tehát egy kisebb csoport az alaphalmazon belül.

Például: az alaphalmazunk a nullánál nagyobb természetes számok, a hozzárendelési szabályunk pedig a páratlan számokhoz rendeljük a kétszeresét, akkor az értelmezési tartomány a páratlan számok, mert csak nekik lesz képük a képhalmazban. (A párosakhoz a szabály szerint nem rendeltünk semmit.)

3.1.4. meghatározás (Értékkészlet)

Most kiválasztjuk a képhalmazból azokat az elemeket, amelyek valamelyik értelmezési tartománybeli elemnek a képei, és ezeket együtt a függvény értékkészletének nevezzük. Ez tehát egy kisebb csoport a képhalmazon belül.

Például: az alaphalmazunk a nullánál nagyobb természetes számok, a hozzárendelési szabályunk pedig a páratlan számokhoz rendeli a kétszeresét, akkor az értékkészlet a páros számok egy része lesz. (Csak páros szám lehet valaminek a kétszerese, de nem lesz benne mindegyik, csak az, amelyik páratlannak a kétszerese.)



3.1.5. meghatározás (Hozzárendelések, függvények megadása)

A hozzárendeléseket és a függvényeket megadhatjuk. . .

- nyíldiagrammal (mint a fenti ábrán láthatod)
- leírással (Például: rendeli a számokhoz a kétszeresüket)
- hozzárendelési szabállyal (Például: $x \mapsto 3 \cdot x$)
- grafikonnal (későbbi ábrákon ilyet is találunk)

3.1.6. meghatározás (Szám – szám függvény)

Azokat a függvényeket, amelyeknek az alaphalmaza és a képhalmaza is számhalmaz, szám – szám függvényeknek nevezzük. (Másképpen fogalmazva: számhoz, számot rendelnek hozzá.)

Például: rendeli mindegyik számhoz a kétszeresét (számhoz rendeltünk számot, lásd a 3.1.2 meghatározást!)

3.1.7. meghatározás (Függvény ábrázolása)

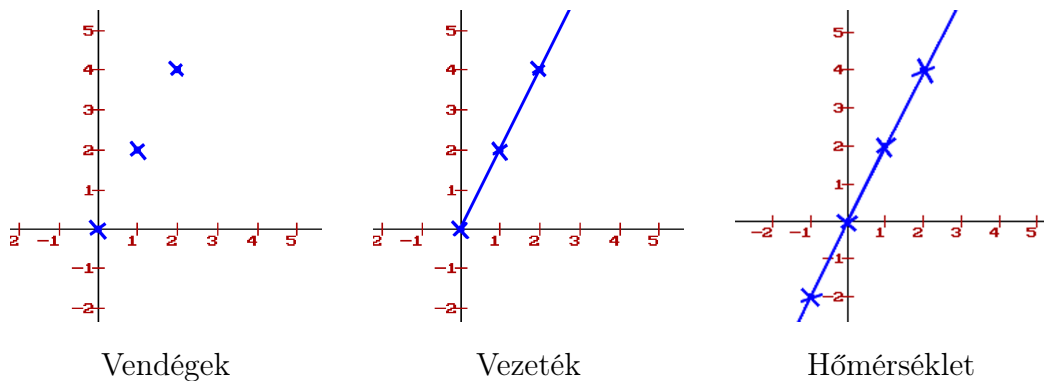
A függvényeket koordináta-rendszerben is ábrázolhatjuk. Ilyenkor az értelmezési tartomány elemét az x tengelyen, az értékkészlet elemét az y tengelyen ábrázoljuk. A függvény ábrázolásakor kapott pontokat csak akkor kötjük össze folytonos vonallal, ha az x tengely minden értékéhez tartozik y érték. Ha nem, akkor csak a pontokat jelöljük.

Például: A meghívott vendégeket akarjuk ábrázolni. Ha 1 gyereknek 2 vendége lehet, ezt ábrázoljuk egy ponttal, 2 gyereknek 4 lehet, ezt is ábrázolhatjuk. De

egy és fél gyerek nincs, tehát a két pontot nem köthetjük össze, a két szám (1 és 2) között a függvénynek nincs értéke.

Ha vezetéket vásárolunk egy boltban, akkor már van a 1 méter és a 2 méter között is szám, tehát lehet folytonos vonal, de negatív nem lehet, tehát nullától fog kezdődni.

És ha a melegítés vagy hűtés hatására a hőmérséklet növekedését vagy csökkenését akarjuk ábrázolni, akkor már negatív értékek is előfordulnak (mínusz fokok), tehát az egyenes mindkét irányban folytatódik.



3.1.8. meghatározás (Merekség)

Egy függvény merekségén a grafikonjának a vízszintes (x) tengellyel bezárt szögét nevezzük. A merekség annál nagyobb, minél nagyobb az arányszám. A merekség lehet negatív is, ha az értékek csökkennek.

Például: az előző ábrákon a merekség 2, mert ha az x tengelyen egyet lépünk, az y tengelyen kettőt emelkedik a függvény értéke. (Egynél kettő, kettőnél négy, stb.)

3.1.9. meghatározás (Egyenes arányosság függvénye)

Az egyenes arányosság minden x elemhez hozzárendeli annak valahányszorosát. A hozzárendelési szabályt többféleképpen is felírhatjuk:

$$f : x \mapsto a \cdot x \text{ vagy}$$

$$f(x) = a \cdot x \text{ vagy}$$

$$y = a \cdot x$$

Az egyenes arányosság grafikonja egy origón átmenő egyenes.

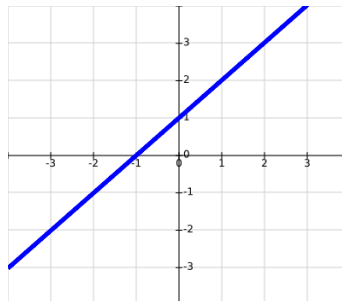
3.1.10. meghatározás (Elsőfokú függvény)

Egy függvényt akkor nevezünk elsőfokúnak, ha a változó (x) az első hatványon fordul elő. (Nincs kitevője, mert az első hatványt nem szoktuk kiírni.) Grafikonja az egyenes arányosság függvényével párhuzamos, föntebb vagy lentebb eltolva az y tengelyen. Többféleképpen is jelölhetjük a hozzárendelés szabályát:

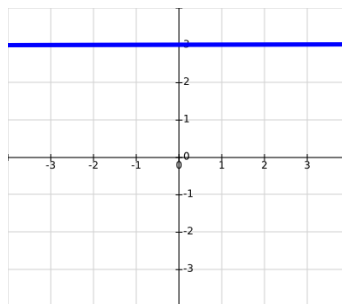
$$f : x \mapsto a \cdot x + b \quad (a \neq 0) \text{ vagy}$$

$$f(x) = a \cdot x + b \quad (a \neq 0) \text{ vagy}$$

$$y = a \cdot x + b \quad (a \neq 0)$$

**3.1.11. meghatározás** (Nulladfokú függvény)

Ez az x tengellyel párhuzamos egyenes, vagyis minden x értékhez ugyanazt a számot rendeljük. Azért nevezik nulladfokúnak, mert a hozzárendelés szabálya $x^0 = 1$ miatt, ha $x \neq 0$ akkor felírható $x \mapsto x^0 + 3$ alakban. Mivel minden x -hez ugyanazt a számot rendeli idegen szóval konstans függvénynek is nevezik. (konstans = állandó)

**3.1.12. meghatározás** (Lineáris függvény)

A nulladfokú és az elsőfokú függvényt lineáris függvénynek is nevezzük, mert grafikonjuk egyenes. A hozzárendelési szabálya ugyanaz, mint az elsőfokú függvényé. (A konstansfüggvénynél az x együtthatója, az $a = 0$, az egyenes arányosságnál pedig a hozzáadott szám, a $b = 0$, ezért ezeket speciális elsőfokú függvénynek tekintjük.)

3.1.13. meghatározás (Geometriai transzformáció)

Az olyan függvényt, amely egy alakzat minden pontjának hozzárendelési szabály alapján egy másik pontot feleltet meg, geometriai transzformációnak nevezzük. (A pontok koordinátákkal vannak megadva.)

3.1.14. meghatározás (Egybevágóság)

A geometriai transzformáció akkor egybevágóság, ha az alakzat két pontját összekötő szakasz ugyanolyan hosszú, mint az eredeti alakzatban ugyanaz a szakasz. Az eredeti alakzat és a képe tehát ugyanolyan méretű, és alakú. (Tehát a szögek, a terület és a területek is egyenlők.) Egybevágósági transzformáció az eltolás, a tengelyes tükrözés, és az elforgatás. Az egybevágóság jele: $\cong$

4. fejezet

Algebra – új anyag

4.1. Műveleti tulajdonságok

A matematikának ez az ága a műveletek általánosításával, tulajdonságaival és az egyenletek megoldásával foglalkozik.

4.1.1. meghatározás (Felcserélhetőség)

Az összeadás tagjai és a szorzás tényezői felcserélhetők.

Például: $a + b = b + a$ és $a \cdot b = b \cdot a$

4.1.2. meghatározás (Csoportosíthatóság)

Három vagy annál több összeadás és szorzás esetén az elvégzésük sorrendje tetszőleges. (Tetszőlegesen zárójelezhetők.)

Például: $(a + b) + c = a + (b + c)$ és $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

4.1.3. meghatározás (Tagolhatóság)

Ha egy összeadást kell szorozni egy számmal, akkor mindegy, hogy először összeadjuk a két számot és utána szorozzuk a harmadikkal (bal oldal), vagy először mindkettőt megszorozzuk, és utána adjuk össze őket (jobb oldal). Ez a kivonásra is igaz!

Például: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

4.1.4. meghatározás (Halmazok)

Az egyenletek megoldásánál is szükséges halmazokról beszélnünk.

- 1. Alaphalmaz: az egyenlet megoldásait ennek a halmaznak az elemei között keressük. Például a természetes számok halmaza.*
- 2. Igazsághalmaz: vannak olyan számok, amelyek az egyenletet igazgá teszik, és vannak, amik nem. Az igazsághalmazba azok tartoznak, amik igazgá teszik.*

3. A megoldások, más szóval gyökök, az igazsághalmaz elemei.
4. A megoldás során megkeressük az igazsághalmaz összes elemét.

4.1.5. meghatározás (Algebrai kifejezés)

Ha a négy alapműveletet számokra, betűkre (ismeretlenek), és ezek hatványaira alkalmazzuk, algebrai kifejezéseket kapunk. A betűk (az ismeretlenek) valamelyik számhalmaz elemeit helyettesítik. (Hogy melyik számhalmazra vonatkozik, az a feladat kiírásából derül ki, ha hosszúságról szól a feladat, akkor a negatív számok nem lehetnek benne.)

Például: $2 \cdot a$, vagy $3 \cdot x^2$, vagy $3 \cdot x^2y - 2,1x^3$.

Az algebrai kifejezésekben a betűket (ismeretleneket) változóknak, azokat a számokat, amikkel megszoroztuk a betűket együtthatóknak, a többi számot pedig állandóknak, vagy konstansoknak nevezzük.

Megjegyzések:

Ha nem zavarja a kifejezés megértését, akkor a szorzásjeleket elhagyjuk a betűk és a számok között.

Amikor nincs kiírva a betű elé együttható, akkor az 1 vagy -1 . Ha 1, akkor semmit nem írunk a változó elé, ha -1 , akkor a „ $-$ ” előjelet kiírjuk.

4.1.6. meghatározás (Algebrai egész kifejezés)

Algebrai egész kifejezésnek nevezzük az olyan algebrai kifejezéseket, amelyek nem tört alakúak, vagy ha tört alakú, akkor a nevezőben nincs változó. Természetesen a tört helyett gondolhatunk „ $:$ ” jellel felírt hányadosra is!

Például: $2xy^2 + 3x^5$ vagy $\frac{2x-5y^3}{20}$ vagy $(2x^2 - 3) : 17$

4.1.7. meghatározás (Algebrai törtkifejezés)

Azok az algebrai kifejezések, amelyek törtalakúak (vagy hányadosok), és a nevezőjükben (hányados esetén osztójukban) van változó. Ilyenkor mindig jelezni kell, hogy a nevező (vagy az osztó) nem lehet nulla, mert a nullával osztás nincs értelmezve. Fontos, hogy a törtvonal zárójelet helyettesít, ezért ha a törtet más formában írjuk fel (osztásként, vagy közös törtvonallal), akkor az egyes számlálók és nevezők zárójelbe kerülnek!

Például: $\frac{3xy^2}{2z}$ vagy $(5zy - 3) : (2x + 1)$

4.1.8. meghatározás (Helyettesítési érték)

Az a szám amit akkor kapunk eredményül, ha az algebrai kifejezés változóinak a helyére számokat írunk és elvégezzük a műveleteket. (A számokat csak a megadott halmazból vehetjük!)

Például: $x = 3$ és $y = 4$ esetén a $2x + 3y$ algebrai kifejezés helyettesítési értéke 18, mert $2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 6 + 12 = 18$

4.1.9. meghatározás (Egynemű, különmemű algebrai kifejezések)

Azokat az algebrai kifejezéseket, amelyek csak együtthatókban különböznek egynemű algebrai kifejezéseknek nevezzük. Az egynemű ellentéte a különmemű. Figyelj arra, hogy ha összeszorzol két változót, az nem egynemű a külön-külön vett két változóval! Tehát: xy nem egynemű az x -el sem az y -nal.

Példák:

$5x$ egynemű a következőkkel: $3x$, $\frac{2}{3}x$, $\frac{12}{3x}$, $-7x$, $2,1x$

de különmemű a következőkkel: $5y$, $\frac{12x}{2y}$, $2x^2$, $-7xy$

4.1.10. meghatározás (Műveletek algebrai kifejezésekkel)

Nagyon fontos, minden egyenletmegoldásnál szükséged lesz rá!

1. Egynemű algebrai kifejezésekkel úgy vonunk össze, hogy az együtthatókat összevonjuk, a változót pedig leírjuk. (Az összevonás az összeadás és a kivonás közös neve.) Például: $2x + 3x \rightarrow (2 + 3)x = 5x$
2. Különmemű algebrai kifejezéseket nem lehet összevonni, csak leírni tudjuk a műveletet, elvégezni nem. Például: $2x - 3y$ továbbra is $2x - 3y$
3. Egytagú kifejezések szorzásakor (vagy osztásakor) az együtthatót az együtthatóval, a változót a változóval szorozzuk (vagy osztjuk).

Például:

Szorzás egyneműnél $2x \cdot 3x \rightarrow (2 \cdot 3) \cdot (x \cdot x) = 6x^2$

Szorzás különmeműnél $2x \cdot 3y \rightarrow (2 \cdot 3) \cdot (x \cdot y) = 6xy$

Osztás egyneműnél: $6x : 3x \rightarrow (6 : 3) \cdot (x : x) = 2 \cdot 1 = 2$

Osztás különmeműnél $6x : 3y \rightarrow (6 : 3) \cdot (x : y) = 2 \cdot \frac{x}{y}$

(Azért van tört a végén, mert az osztást tört formájában is felírhatjuk)

Többtagú kifejezéseknél a korábban tanult szabályok vannak érvényben:

1. Ha egy szorzatot szorzunk, akkor csak az egyik tényezőjét szorozzuk:
 $(2a \cdot 3b) \cdot 5a = 2a \cdot 5a \cdot 3b = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b = 10a^2 \cdot 3b = 30a^2b$ vagy
 $(2a \cdot 3b) \cdot 5c = 2a \cdot 5c \cdot 3b = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot c = 30abc$
2. Ha összeget vagy különbséget szorzunk, akkor minden tagját szorozzuk.
 (Ez tulajdonképpen a szorzat felírása összegalakban)
 $(2a + 3b) \cdot 3a = 2a \cdot 3a + 3b \cdot 3a = 6a^2 + 9ab$ vagy
 $(2a + 3b) \cdot 3c = 2a \cdot 3c + 3b \cdot 3c = 6ac + 9bc$

Ha az utolsó példát visszafelé olvasod, akkor a **kiemelés** eljárását láthatod, ez ugyanis az összeg vagy különbség szorzásának a fordítottja. Nem egy szorzatot írsz fel összeg alakban, hanem egy összeget szorzat alakban.

A biztonság kedvéért egy példa:

$6ac + 9bc = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot c + 3 \cdot 3 \cdot b \cdot c$, mivel a szorzat tényezői felcserélhetők:

$$2 \cdot a \cdot 3 \cdot c + 3 \cdot b \cdot 3 \cdot c = 2a \cdot 3c + 3b \cdot 3c = 3c \cdot (2a + 3b)$$

Ellenőrizheted úgy, hogy elvégzed a beszorzást!

4.1.11. meghatározás (Mérlegelv)

A mérlegelvet vagy más néven egyenlő változtatás elvét az egyenletek megoldására használjuk. Az eredmény (igazsághalmaz) nem változik, ha...

1. bármelyik elemét egy vele azonossal helyettesítjük. Például a $2 \cdot 6$ helyett azt írjuk, hogy 12
2. mindkét oldalához hozzáadjuk vagy belőle elvesszük ugyanazt a számot, vagy ismeretlent
3. mindkét oldalát szorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal

A fentieket mondhatjuk úgy is, hogy „megoldhatjuk az egyenletet úgy, hogy...”

Megjegyzés: ezek a szabályok az egyenlőtlenségekre is igazak, csak arra kell vigyázni, hogyha negatív számmal osztjuk vagy szorozzuk mindkét oldalt, akkor az egyenlőtlenség (kacsacsőr) iránya megfordul.

4.1.12. meghatározás (Törtegyütthetős egyenletek megoldása)

Ez nem vonatkozik algebrai törtekre, amikor a nevezőben változó is van!

Közös nevezőre hozzuk a törteket (megkeressük a nevezők legkisebb közös többszörösét), majd amikor már közös nevezőn vannak akkor az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a nevezővel. Így a tört eltűnik és a megszokott módon folytatjuk a megoldást.

Megjegyzés:

A szabály egyenlőtlenségekre is igaz, de ha negatív számmal szoroztunk, akkor a relációjel megfordul.

4.1.13. meghatározás (Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása grafikonnal)

A két egyenlet grafikonját közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk, majd leolvassuk a megoldást, a következőképpen:

1. Az egyenletnek egy megoldása van, ha a két grafikon metszi egymást, a megoldás az x tengelyen leolvasható érték.
2. Az egyenletnek nincs megoldása, ha a két grafikon párhuzamos egyenes.
3. Az egyenlet azonosság (az alaphalmaz minden eleme megoldás), ha a két grafikon egybeesik.

5. fejezet

Geometria – ismétlés

5.1. Síkidomok

5.1.1. meghatározás (Sokszög)

A záródó töröttvonalat egyszerű sokszögvonalnak, szakaszait oldalaknak, a csatlakozási pontokat csúcsoknak nevezzük. A sokszögvonalon belüli területet sokszögnek nevezzük.

5.1.2. meghatározás (Szabályos sokszög)

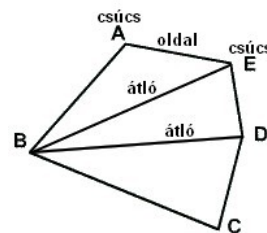
A szabályos sokszögnek minden oldala és minden belső szöge egyenlő.

5.1.3. meghatározás (Átló)

A sokszög két nem szomszédos csúcsát összekötő szakaszt átlónak nevezzük.

Megjegyzés:

Egy sokszögben minden csúcsból hárommal kevesebb átlója húzható, mint ahány csúcsa van. Magyarázat: mivel az átló két *nem szomszédos* csúcsot köt össze, ezért a csúcsok számából ki kell vonni hármat. Azt amelyikből a vonalat húzzuk (a rajzon B), és a két szomszédját (a rajzon A és C). Tehát az összes átlók száma a csúcsok száma szorozva a csúcsok számánál hárommal kisebb számmal. (Képlettel, ahol n a csúcsok száma: $n \cdot (n - 3)$)



5.1.4. meghatározás (Kerület)

A sokszög kerülete a határoló töröttvonal hossza. Másképpen fogalmazva: az oldalak hosszának összege.

5.1.5. meghatározás (Konvex – Konkáv)

Konvexnek nevezzük egy sokszöget, ha minden szöge kisebb 180° -nál. Ha van

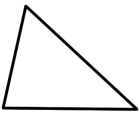
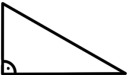
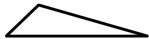
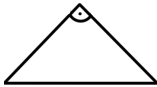
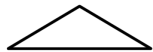
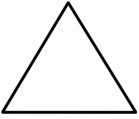
olyan szöge, ami nagyobb, akkor konkávnak mondjuk. (A matematikai meghatározás: ha bármely két pontot összekötő szakasz a határolóvonalon belül van, akkor konvex, ha metszi azt, akkor konkáv. Játékosan szoktuk úgy is mondani, hogyha el lehet bújni benne, akkor konkáv, ha nem akkor konvex.)

5.2. Háromszögek

Külön fejezetbe kerültek a háromszögek, mert az elmúlt két évben nagyon sok dolgot tanultunk róluk.

5.2.1. meghatározás (Háromszög)

A háromoldalú sokszöget háromszögnek nevezzük.

A háromszögek csoportosítása			Szögek szerinti csoportosítás		
			Hegyesszögű	Derékszögű	Tompaszögű
Oldalak szerinti csoportosítás	Általános				
	Egyenlő szárú	Két oldala egyenlő			
		Három oldala egyenlő		X	X

5.2.2. meghatározás (Jelölések:)

A háromszög jele: $ABC\triangle$. A csúcsokat nagybetűkkel jelöljük, az oldalakat kisbetűkkel, vagy annak a két csúcsnak a betűjével, ami között van. (Például: a , b , c vagy BC , AC , AB , a sorrend nem véletlen, az oldal a szemben lévő csúcstről kapja a betűjelét, vagyis az $a = BC$ -vel.)

A szögeket a görög ábécé kisbetűivel jelöljük (Például: α , β , γ), de megadhatjuk a csúcs jelével is, ami mellett van, illetve a három csúcs jelével, melyből a középső betű jelzi, hogy melyik csúcsnál van. (Például: $A\angle$, $B\angle$, $C\angle$, vagy $CAB\angle$, $ABC\angle$, $BCA\angle$)

A külső szögeket felső vesszővel (aposztróffal) jelöljük: α' , β' , γ'

5.2.3. meghatározás (Belső és külső szög összege)

A háromszög belső szöge és a mellette fekvő külső szög 180° -ra egészíti ki egymást.

5.2.4. meghatározás (Háromszög egyenlőtlenség)

A háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.

5.2.5. meghatározás (Belső szögek összege)

A háromszög belső szögeinek összege 180° .

5.2.6. meghatározás (Külső szögek összege)

A háromszög külső szögeinek összege 360° .

5.2.7. meghatározás (Szögek közötti összefüggés)

A háromszög külső szöge megegyezik a két nem mellette fekvő belső szög összegével.

5.2.8. meghatározás (Egyenlő oldalak és szögek)

A háromszögben egyenlő oldalakkal szemben, egyenlő szögek vannak.

5.2.9. meghatározás (Nem egyenlő oldalak és szögek)

A háromszögben a hosszabb oldallal szemben lévő szög nagyobb, mint a rövidebb oldallal szemben lévő.

Az egyértelmű szó a következő meghatározásban azt jelenti, hogy ugyanazokból az adatokból nem lehet kétféle háromszöget szerkeszteni. Vagyis, ezek az adatok egy bizonyos háromszöget határoznak meg, nem lehetséges, hogy másfélét is szerkesszünk belőlük.

5.2.10. meghatározás

A háromszög egyértelműen megszerkeszthető, ha adott...

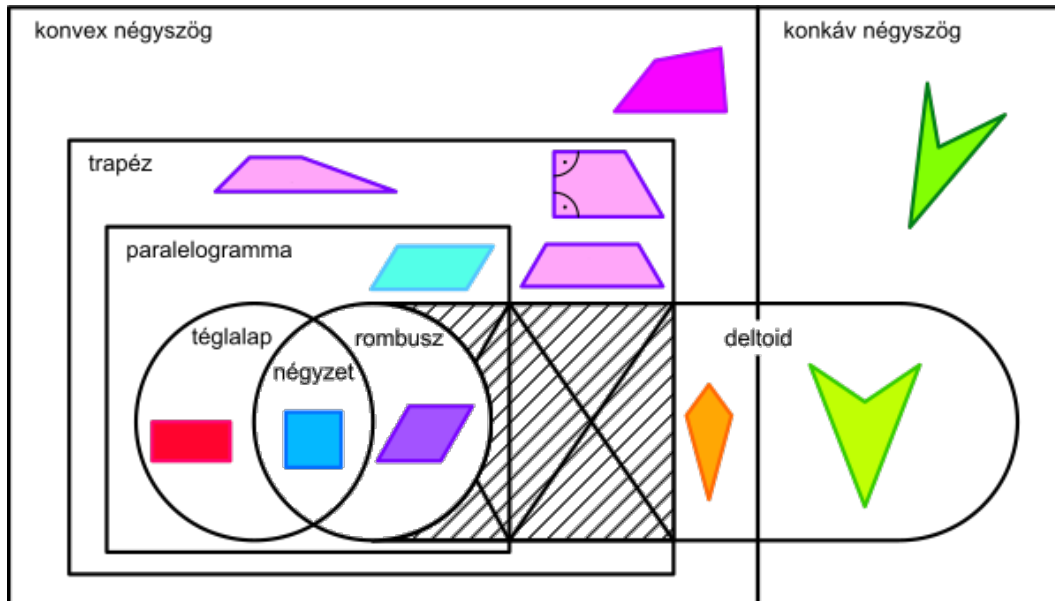
- két oldala, és az általuk közrezárt szög.
- három oldala.
- egy oldala és a rajta fekvő két szög.
- két oldala és a nagyobbikkal szembeni szög.

Megjegyzések:

Ha végiggondolod a fentieket, rájössz, hogy a derékszögű háromszöghöz, az egyenlő szárú háromszöghöz, és az egyenlő oldalú háromszöghöz kevesebb adat is elég, mert a derékszögűben az egyik szögről tudjuk, hogy 90° , az egyenlő szárúban egy oldallal két oldalt adunk meg, az egyenlő oldalúban pedig ismerjük mindhárom szöget. Ugyanígy kevesebb adat is elég, ha egyenlő szárú derékszögű a háromszög, stb.

5.3. Négyyszögek

A négyszögek fajtáival megismerkedtünk és a tulajdonságaikat is megtanultuk. Hogy érthetőbbek legyenek a tulajdonságok itt egy összehasonlító ábra, amelyen halmazok ábrázolják a négyszögek fajtáit.



Minden négyszögnél ugyanazokról a tulajdonságokról fogunk beszélni, talán könnyebb, ha először ezeket tanulod meg és utána azt, hogy melyik négyszögre mi jellemző. Tehát a tulajdonságok megadásánál beszélned kell: az oldalakról, a szögekről, az átlókról, a szimmetriatengelyekről.

5.3.1. meghatározás (Négyszög)

A négyoldalú sokszöget négyszögnek nevezzük, belső szögeinek összege 360° . (Nincs semmilyen megkötés, a négy oldal hossza és a négy szög nagysága különböző is lehet, és a párhuzamosság sem feltétel.)

5.3.2. meghatározás (Trapéz)

Tulajdonságok:

1. Oldalak: két oldala párhuzamos
2. Szögei: –
3. Átlói: –
4. Szimmetriatengely: –

Megjegyzés:

Bizonyára észrevetted, hogy alig szerepel valamilyen tulajdonság. Ha az előző halmazábrával összehasonlítod, akkor látni fogod, hogy ennél már csak az általános négyszög a tágabb kategória, ezért nincs sok megkötés.

Vannak speciális esetek, azokról többet tudunk: az *egyenlő szárú trapéz* átlói, szárai és alapon fekvő szögei egyenlők, az alap felezőmerőlegese szimmetriatengely. A *derékszögű trapéz* két szöge egyenlő (90°).

5.3.3. meghatározás (Paralelogramma)

Tulajdonságok:

1. *Oldalak: két-két oldala párhuzamos és egyenlő (a szemköztiek)*
2. *Szögei: két-két szöge egyenlő (a szemköztiek)*
3. *Átlói: két átlója felezi egymást*
4. *Szimmetria: egy szimmetriatengelye van*

Megjegyzés:

Hirtelen sok tulajdonság lett. . .

Ezekből még továbbiak is következnek:

- A szomszédos szögek összege 180°
- A paralelogrammát bármelyik átlója két egybevágó háromszögre bontja

Jegyezd meg, hogy a paralelogramma nem egy bizonyos síkidom, ami úgy néz ki, mint a halmazábrában, hanem a síkidomok egy csoportja. Gondolj vissza a trapézra: mondhatjuk, hogy minden paralelogramma egyben trapéz is, mert a trapéz tulajdonsága, hogy két oldala egyenlő. Ennek a paralelogramma is eleget tesz, sőt többet tud, mert neki két-két oldala egyenlő. Hogy egyértelmű legyen, mindig a legszűkebb csoportot adjuk meg. Nem mondjuk a paralelogrammára, hogy trapéz, bár igaz lenne. (Anyukád sem mondja, hogy etesd meg az emlősállatot, bár a kutya emlősállat, tehát igaz lenne.)

5.3.4. meghatározás (Speciális paralelogrammák)

A paralelogrammáknak vannak speciális esetei, mint a trapéznak is voltak:

1. *Téglalap:*
 - *Oldalak: két-két szembenlévő oldala párhuzamos és egyenlő*
 - *Szögek: Minden szöge egyenlő (derékszög)*
 - *Átlói: egyenlők és felezik egymást, a téglalapot négy egyenlőszárú háromszögre bontják*
 - *Szimmetria: két szimmetriatengely, az oldalak felezőmerőlegesei*

2. Rombusz

- *Oldalak: minden oldala egyenlő*
- *Szögek: a szemköztiek egyenlők, a szomszédosak 180° -ra egészítik ki egymást*
- *Átlók: felezik egymást, derékszöge zárnak be, felezik a szögeket, a rombuszt négy egybevágó derékszögű háromszögre bontják*
- *Szimmetria: az átlók a szimmetriatengelyei*

3. Négyzet

Rendelkezik a téglalap és a rombusz összes tulajdonságával, vagyis:

- *Oldalak: egyenlők és a szemköztiek párhuzamosak*
- *Szögek: egyenlők (derékszögek)*
- *Átlók: felezik egymást, merőlegesek, felezik a szögeket, a négyzetet négy egyenlőszárú egybevágó derékszögű háromszögre bontják*
- *Szimmetria: az átlók és az oldalfelező merőlegesek is szimmetriatengelyek*

5.3.5. meghatározás (Deltoid)

Tulajdonságok:

1. *Oldalak: két-két szomszédos oldala egyenlő*
2. *Szögei: csak két egyenlő szögéről tudjuk biztosan, hogy egyenlő*
3. *Átlói: a hosszabbik felezi a rövidebbiket*
4. *Szimmetria: egy szimmetriatengelye van, a hosszabbik átló*

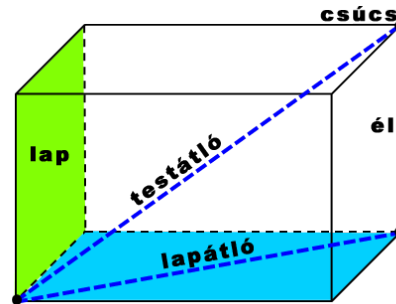
Megjegyzés:

A rombuszra a deltoid tulajdonságai is igazak, sőt több is, ezért a rombuszt nemcsak speciális paralelogrammának, hanem speciális deltoidnak is tekinthetjük.

Deltoidból létezik konkáv is. (Lásd az [5.1.5](#) meghatározást, és a halmazábrát!)

5.4. Testek

Az eddigi alakzataink is a térben helyezkedtek el, de mivel minden pontjuk egy síkra illeszkedett (=síkido), ezért a tér többi részével eddig nem foglalkoztunk. Most viszont a testek következnek, melyeket síkidomok határolnak, és mindegyik síkidom más-más síkra illeszkedik. Most is kezdjük az elnevezésekkel:



5.4.1. meghatározás (Elnevezések)

Lap: a testeket határoló sokszöglapokat nevezzük így. A lapok csúcsai a test csúcsaiban találkoznak, a szomszédos csúcsokat élek kötik össze. A nem szomszédos, de egy lapon lévő csúcsokat a lapátlók kötik össze, a nem szomszédos és nem is egy lapon lévőket a testátlók. (A lapátlók tulajdonképpen a határoló sokszöglap eredeti átlói.)

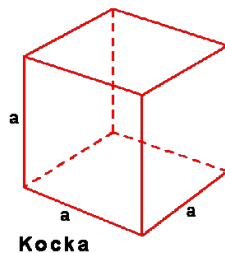
5.4.2. meghatározás (Felszín)

A testek felszínén a határolólapok területének az összegét értjük. (Például: egy kockát 6 db négyzet határol, így a kocka felszíne a négyzetek területének az összege. Egy négyzeté a^2 , a teljes felszín $6 \cdot a^2$.)

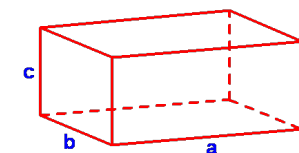
5.4.3. meghatározás (Kocka felszíne és térfogata)

A felszíne 6 db négyzetből áll, így a felszín: $A = 6 \cdot a^2$

A térfogata (alapterület szorozva magassággal) $V = a^2 \cdot a = a^3$



Kocka



Téglatest

5.4.4. meghatározás (A téglatest felszíne és térfogata)

A téglatest felszíne háromféle téglalapról áll, mindegyikből kettő van. Egy téglalap területe a hosszabb oldal szorozva a rövidebb oldallal. Így a háromféle téglalappal a teljes felszín: $A = 2 \cdot (a \cdot b) + 2 \cdot (b \cdot c) + 2 \cdot (a \cdot c)$

A téglatest térfogata is egyenlő az alapterület és a magasság szorzatával, ami most a háromféle él szorzatát jelenti: $V = a \cdot b \cdot c$

6. fejezet

Geometria - új anyag

6.1. Egybevágósági transzformációk

6.1.1. meghatározás (Vektor)

Az AB irányított szakaszt **vektornak** nevezzük, és így jelöljük: $\overrightarrow{AB}$, amit „ AB vektor”-nak olvasunk. A vektort jelölhetjük másféleképpen is (vastagon írt kisbetűvel), de az olvasása ugyanaz. Két vektort akkor **egyenlő**, ha nemcsak a nagyságuk, hanem az irányuk is megegyezik. Ha az irányuk ellentétes, de a nagyságuk egyforma, akkor **ellentett vektor** a nevük. Jelölés a nagybetűk megfordításával, vagy a kisbetű elé írt mínusz jellel történik. $\overrightarrow{AB}$ ellentett vektora a $\overrightarrow{BA}$, és az $\mathbf{a}$ ellentett vektora a $-\mathbf{a}$. **Nullvektor** az a vektor, aminek nagysága nulla, az iránya pedig tetszőleges.

6.1.2. meghatározás (Eltolás)

Ha egy alakzat minden pontját ugyanabban az irányban, ugyanakkora távolságra mozgatjuk el, (másképpen mondva ugyanazzal a vektorral) akkor minden pontjához egyértelműen rendelünk hozzá egy pontot. Ezt a mozgatást eltolásnak nevezzük. Az eltolás egybevágósági transzformáció. (Más szóval hozzárendelés: pont-pont függvény. Lásd a 3.1.13 és a 3.1.14 meghatározásokat.)

6.1.3. meghatározás (Az eltolás tulajdonságai)

Az eltolás tulajdonságai a következők:

1. Minden szakasz ugyanolyan hosszú, mint a képe. (szakasztartó)
2. Minden szög ugyanakkora mint a képe. (szögtartó)
3. Nem változtatja meg a körüljárás irányát.

6.1.4. meghatározás (Tengelyes tükrözés)

A tengelyes tükrözés során a tükörtengelyre minden pontból merőlegest állítunk, és erre a merőlegesre még egyszer felmérjük a pont és az egyenes távolságát az egyenestől kezdve. Így kölcsönösen egyértelműen feleltetjük meg az alakzat pontjainak a sík pontjait. A tengelyes tükrözés egybevágósági transzformáció. (Más szóval hozzárendelés: pont-pont függvény. Lásd a 3.1.13 és a 3.1.14 meghatározásokat.)

6.1.5. meghatározás (A tengelyes tükrözés tulajdonságai)

A tengelyes tükrözés tulajdonságai a következők:

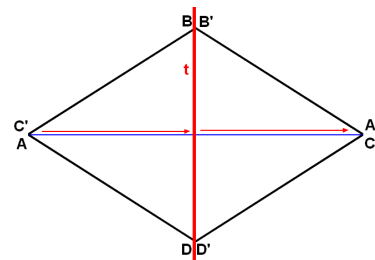
1. Egy pont és a képe egyértelműen meghatározza a tengelyes tükrözést. (A két pontot összekötő szakasz felező merőlegese a tükörtengely, a szerkesztésnek nem lehet kétféle eredménye.)
2. A tengely bármely pontjának a képe önmaga. (helyben hagyás)
3. A tengellyel párhuzamos egyenes képe is párhuzamos, a tengely az egyenestől és a képétől egyenlő távolságra van.
4. A tengelyt metsző egyenes és képe a tengelyen metszi egymást, a tükörtengely szögfelező.
5. Mivel egybevágósági transzformáció, ezért szakasztartó, szögtartó.
6. A körüljárási irányt megváltoztatja.
7. Megfelel a sík tengely körüli 180° fokok elforgatásának.

6.1.6. meghatározás (Tengelyesen szimmetrikus alakzat)

Akkor mondjuk, hogy egy alakzat tengelyesen szimmetrikus, ha van olyan szimetriatengely, amire az alakzatot tükrözve, a kép és az alakzat fedik egymást.

Például ilyen a rombusz átlója.

Ha a rombuszt tükrözöd az átlójára, akkor az alakzat nem változik, az A és C csúcsok „helyet cserélnek”, a B és D csúcs pedig helyben marad, az elnevezésük B' és D' lesz.



6.1.7. meghatározás (Középpontos tükrözés)

A középpontos tükrözés során az alakzat pontjaiból a tükrözés középpontján keresztül félegyenest húzunk, és erre mérjük fel az alakzat pontja és a középpont távolságát a középponttól kezdve. Így az alakzat pontjaihoz kölcsönösen egyértelműen a sík pontjait rendeljük: pont-pont függvény. Lásd a 3.1.13 és a 3.1.14 meghatározásokat.

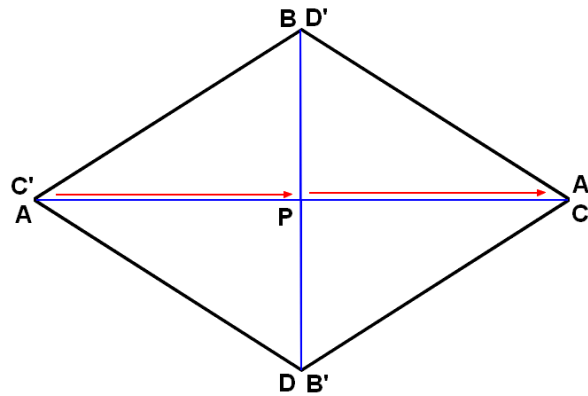
6.1.8. meghatározás (A középpontos tükrözés tulajdonságai)

A középpontos tükrözés tulajdonságai a következők:

1. *A tükrözés középpontjának képe önmaga. (helyben hagyás)*
2. *Mivel egybevágósági transzformáció, ezért szakasztartó, szögtartó.*
3. *Bármely szakasz képe párhuzamos a szakasszal.*
4. *A körüljárási irányt nem változtatja meg.*
5. *Megvalósítható 180° -os elforgatással is.*

6.1.9. meghatározás (Középpontosan szimmetrikus alakzat)

Akkor mondjuk az alakzatot középpontosan szimmetrikusnak, ha van olyan középpontos tükrözés, amellyel önmagába vihető át. (Az önmagába vihető át kifejezés azt jelenti, hogy a tükrözés során az egyes csúcsok helyet cserélnek, tehát az alakzat nem változik, csak a csúcsok és oldalak elnevezése.)



Például: Ilyen tükrözés

a rombusz középpontos tükrözése az átlók metszéspontjára. Az ábrán láthatod, hogyha az A csúcsot a P pontra tükrözzük, akkor éppen a C csúcsot kapjuk, mert a rombusz átlói felezik egymást, tehát az AP távolságot a P pontból mérve éppen C-be jutunk. (piros nyíl) A többi csúcs esetében is ez fog történni.

6.1.10. meghatározás (Elfordulás)

Ha a szög szárai egybeesnek (fedik egymást), akkor azt nullszögnek nevezzük. Az elfordulást irányított szöggel jellemezzük, ami azt jelenti, hogy a szögnek nemcsak a nagyságát állapítjuk meg, hanem azt is, hogy melyik irányban nyitották. Pontosabban fogalmazva: forgatták el az egyik szárát. Megállapodás szerint az óramutató járásával ellentétes forgatás a pozitív szög, és a meg egyező a negatív. Az elfordulás nagysága annak a szögnek a nagysága, amit a szög szár sűrol. (előjel nélkül) Az elfordulás során többször is körbe forgathatjuk a szög szárát, vagyis az elfordulás lehet nagyobb, mint 360° .

6.1.11. meghatározás (Forgatás)

A forgatás során az alakzat minden pontját egy pont körül ugyanabban az irányban, ugyanazzal a szöggel forgatjuk el. (A forgatás középpontját összekötjük az alakzat egyik pontjával ezt tekintjük az egyik szögszárnak, erre mérjük fel a megadott szöget.) Így az alakzat pontjaihoz kölcsönösen egyértelműen a sík pontjait rendeljük: pont-pont függvény. Lásd a [3.1.13](#) és a [3.1.14](#) meghatározásokat.

6.1.12. meghatározás (A forgatás tulajdonságai)

A forgatás tulajdonságai a következők:

- 1. A forgatás egybevágósági transzformáció, tehát szakasztartó, és szögtartó.*
- 2. A forgatást a középpontja és a szöge egyértelműen meghatározza. Vagyis a két adatból csak egyféleképpen szerkeszthető meg.*
- 3. A körüljárás iránya nem változik.*

6.1.13. meghatározás (Forgásszimmetrikus alakzat)

Egy alakzat akkor forgásszimmetrikus, ha létezik olyan 0° -nál nagyobb és 360° -nál kisebb szögű elforgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át.

Például: a négyzetet az átlók metszéspontja körül 90° -kal elforgatva önmagába vihetjük át. (Magyarázatért lásd a [6.1.9](#) meghatározást.)

6.1.14. meghatározás (A háromszögek egybevágóságának alapesetei)

Két háromszög egybevágó, ha megegyeznek...

- 1. három oldalukban*
- 2. két oldalukban és a közrezárt szögben*
- 3. két oldalukban és nagyobbikkal szembeni szögben*
- 4. egy oldalukban és az azon fekvő két szögben*

6.1.15. meghatározás (A háromszög magasságvonalai)

A háromszög csúcsaiból a szemközti oldalig tartó szakaszokat a háromszög magasságának, ezek egyenesét a háromszög magasságvonalának nevezzük. A derékszögű háromszög két magassága megegyezik a két befogóval, a tompaszögű háromszög két magassága pedig a háromszögön kívül van, és a szemközti oldal meghosszabbításáig tart.

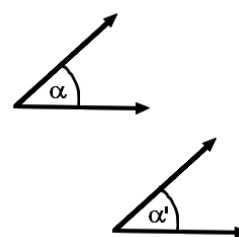
6.2. Szögpárok

Az alábbi meghatározások a szögpárokat mutatják be. Ezekre azért van szükség, mert így később is könnyen megállapíthatod két szögről, hogy egyenlő-e, ha azt biztosan tudod, hogy párhuzamosak a száraik.

Egyállású szögek

Egyállású szögek: az olyan párhuzamos szárú szögek amelyek mindkét szára egyirányú, és a csúcuk nem közös. Az ilyen szögek egyenlők.

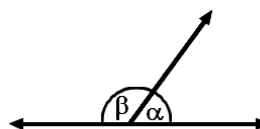
(Tulajdonképpen egy szög eltolásáról van szó, és az eltolás szögtartó.)



Mellékszögek

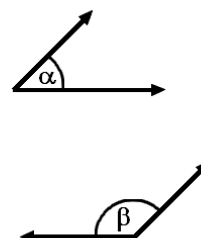
Mellékszögek: az olyan párhuzamos szárú szögek amelyek egyik szára egyirányú, a másik ellentétes irányú, és a csúcuk közös. Az ilyen szögek 180° -ra egészítik ki egymást.

Tulajdonképpen a szögszárak ugyanarra a két egyenesre esnek.



Társszögek

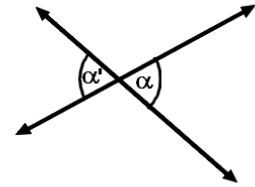
Társszögek: az olyan párhuzamos szárú szögek amelyek egyik szára egyirányú, a másik ellentétes irányú és a csúcuk nem közös. Az ilyen szögek 180° -ra egészítik ki egymást.



Csúcsszögek

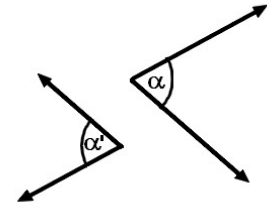
Csúcsszögek: az olyan párhuzamos szárú szögek amelyek mindkét szára ellentétes irányú és a csúcuk közös. Az ilyen szögek egyenlők.

Tulajdonképpen a szögcsúcsok ugyanarra a két egyenesre esnek.



Váltószögek

Váltószögek: az olyan párhuzamos szárú szögek amelyek mindkét szára ellentétes irányú és a csúcuk nem közös. Az ilyen szögek egyenlők.



6.3. Síkidomok területe

6.3.1. meghatározás (A területegység)

Annak a négyzetnek, amelynek oldala egy hosszúságegység, a területe megállapodás szerint egy területegység. (Az egység szót úgy értjük, hogy ha az oldal 1 m, akkor a terület 1 m^2 , ha az oldal 1 cm, akkor a terület 1 cm^2)

Megjegyzések:

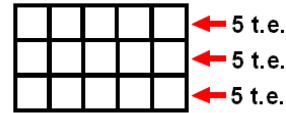
- A terület nem lehet negatív szám.
- Az egybevágó síkidomok területe egyenlő.
- Ha egy síkidomot feldarabolunk, akkor a darabok területének összege egyenlő az eredeti síkidomával.
- Ha olyan sokszög területét kell kiszámítanod, ami a következő felsorolásban nem szerepel, akkor háromszögekre kell bontanod, és a háromszögek területének összegét kell kiszámolnod.
- A szabályos sokszögek egyenlőszárú háromszögekre bonthatók, elég az egyik területét kiszámolni és megszorozni a háromszögek számával.

6.3.2. meghatározás (A téglalap területe)

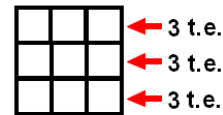
A téglalap területe a hosszabbik oldal és a rövidebbik oldal hosszúságának szorzata.

$$T = a \cdot b$$

Magyarázat: fedjük le a téglalap egyik oldalát terület-egységekkel, legyen mondjuk 5 egység hosszúságú. Ekkor ennek a résznek a területe 5 területegység. Most nézzük meg hány ilyen sort tudunk egymás fölé rakni! Tegyük fel hogy háromat! Ha egy ilyen sornak a területe 5 területegység volt, akkor a három soré háromszor ennyi, vagyis $3 \cdot 5 = 15$ területegység. Ez nem más mint a két oldal szorzata.

**6.3.3. meghatározás** (A négyzet területe)

Már megállapítottuk, hogy a négyzet egy speciális téglalap, ezért a téglalap területe szerint számítjuk ki a négyzet területét is. Természetesen itt a két oldal egyforma lesz.



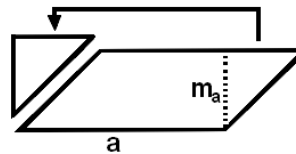
$$T = a \cdot a = a^2$$

Megjegyzés:

Innentől minden síkidomot át fogunk darabolni téglalappá, és így számoljuk ki a területüket.

6.3.4. meghatározás (A paralelogramma területe)

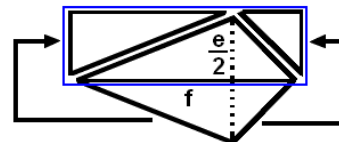
A paralelogrammát átdarabolhatjuk egy téglalappá, amelynek egyik oldala a paralelogramma oldalával egyenlő hosszú, a másik pedig a két oldal távolságával. Tehát a terület:



$$T = a \cdot m_a$$

6.3.5. meghatározás (A deltoid területe)

A deltoid átdarabolásakor egy téglalapot kapunk, amelynek hosszabb oldala a deltoid hosszabb átlója, a rövidebbik pedig a rövidebbik átló fele. (Az ábrán kék kerettel jelöltem.) Így a terület is a fele lesz a két átló szorzatának.



$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$

6.3.6. meghatározás (A rombusz területe)

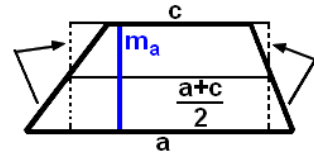
A rombuszról azt tanultuk, hogy speciális paralelogramma és speciális deltoid. Ezért mindkét területszámítási módot használhatjuk:

$$T = a \cdot m_a \quad \text{vagy} \quad T = \frac{e \cdot f}{2}$$

Az ábrát megnézheted a deltoidnál is és a paralelogrammánál is.

6.3.7. meghatározás (A trapéz területe)

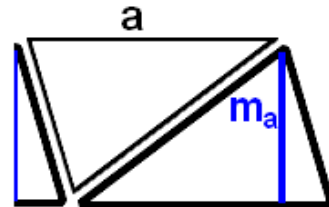
A trapézt csak úgy tudjuk téglalappá átdarabolni, hogyha a két alapjától egyenlő távolságra lévő szakasz lesz az egyik oldal. Ennek a szakasznak a hossza a két alap középértéke. Ezt az $\frac{a+c}{2}$ fejezi ki. Ez lesz a téglalap egyik oldala, a másik oldal pedig ugyanúgy mint a paralelogrammánál, a magasság (m_a). Tehát a képlet:



$$T = \frac{a+c}{2} \cdot m_a$$

6.3.8. meghatározás (A háromszög területe)

A háromszöget úgy alakíthatjuk át paralelogrammává, ha valamelyik oldalára tükrözzük. Ezután már számolhatunk vele úgy, mintha paralelogramma lenne, vagyis $a \cdot m_a$. Csakhogy így két háromszög területét kapjuk meg a tükrözés miatt. Tehát a kapott eredményt el kell osztani kettővel. Most az a oldalra vonatkozó képletet írtam fel, de bármelyik oldallal számolhatsz, csak arra vigyázz, hogy a hozzátartozó magassággal szorozd, vagyis $a \mapsto m_a$, vagy $b \mapsto m_b$, vagy $c \mapsto m_c$. Így a képlet:

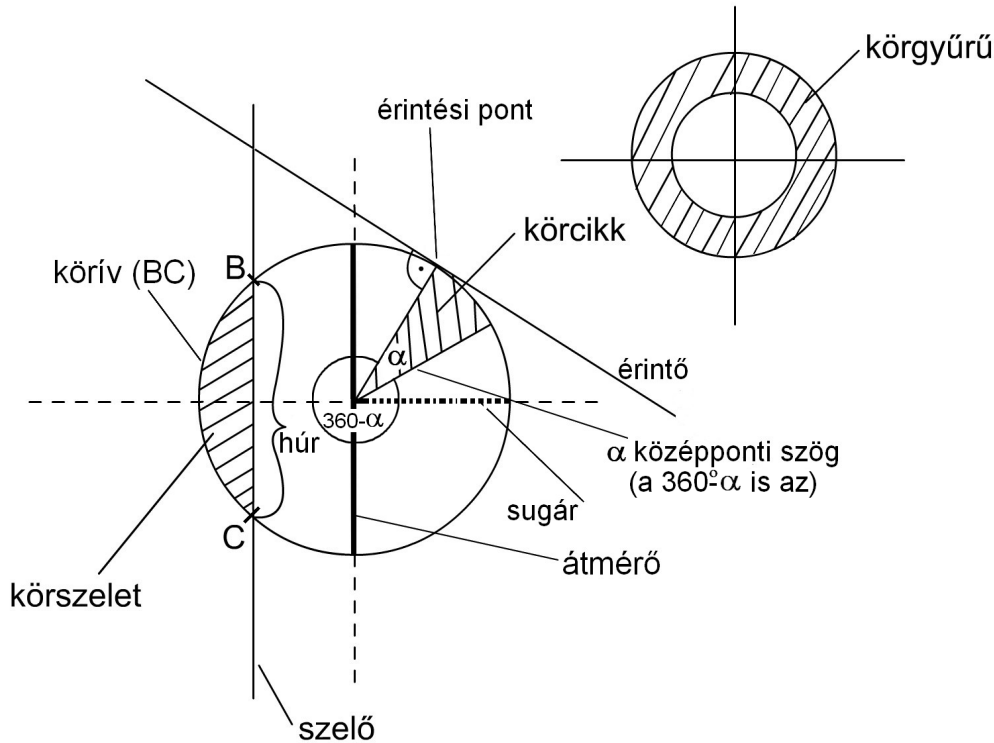


$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

6.4. A kör**6.4.1. meghatározás** (A kör fogalma)

A síkban egy ponttól adott (nem nulla) távolságra lévő pontok körvonalat alkotnak. A pontot a kör középpontjának nevezzük. A megadottnál nem nagyobb (vagyis kisebb vagy egyenlő) távolságra lévő pontok körlapot alkotnak. Ha nem okoz félreértést, akkor a körlapot és a körvonalat is szoktuk körnek nevezni.

6.4.2. meghatározás (A kör részei)



6.4.3. meghatározás (Középponti szög)

A kör két sugara által bezárt szögeket középponti szögeknek nevezzük. Az ábrán α és $360^\circ - \alpha$. A középponti szög két szára körívet metsz ki a körből (az ábrán a húrnál van jelölve). Ugyanabban, vagy ugyanolyan sugarú körben igaz a következő megállapítás:

Az azonos nagyságú körívekhez azonos nagyságú középponti szögek tartoznak és ez fordítva is igaz. Ugyancsak igaz, hogy azonos hosszúságú húrokhoz is azonos középponti szögek tartoznak, továbbá ez is igaz fordítva is.

6.4.4. meghatározás (A kör kerülete és területe)

A kör kerületét és területét a sugár hosszával és egy különleges számmal, a π -vel tudjuk kifejezni. Ez a jel egy görög betű, (pí-nek mondjuk), és egy olyan számot jelent, ami nem írható fel két szám hányadosaként, vagyis olyan tizedes tört, ami végtelen, és nincsenek benne ismétlődő részek. Az általános iskolában csak két tizedesjegyre használjuk, az értéke $\approx 3,14$

A képletek pedig:

$$K = 2 \cdot r \cdot \pi \quad \text{és} \quad T = r^2 \cdot \pi$$

6.5. Hasábok

6.5.1. meghatározás (A hasáb alapfogalmai)

A hasáb olyan test, aminek két lapja egymással egybevágó és párhuzamos sokszög, a többi lapja pedig paralelogramma. (Ez most a síkidomok egy csoportja, amibe a téglalap és a négyzet is beletartozik!)

A párhuzamos sokszögek a hasáb **alaplapjai**, az oldallapokból álló felület pedig a **palást**. Az alaplapokat az **alapélek**, a többit az **oldalélek** határolják. Az alaplapok síkjának távolsága a hasáb **magassága**. (Nem szabad összekeverni a lapokat alkotó síkidomok magasságával!) Ha az oldalélek merőlegesek az alaplap síkjára, akkor **egyenes hasábról** beszélünk. Az egyenes hasáb oldallapjai téglalapok, vagy négyzetek.

Ha egy hasáb palástját kiterítjük egy olyan téglalapot kapunk, aminek az egyik oldala az alaplap kerülete, a másik oldala a hasáb magassága.

6.5.2. meghatározás (A hasáb felszíne)

A hasáb felszíne a határolólapok területének összege, vagyis a két alaplap és a palást területének összege. Azt, hogy melyik mekkora azt a síkidomoknál tanult képletekkel tudod kiszámolni. A felszín képlete tehát:

$$A = 2 \cdot T_{\text{alap}} + T_{\text{palást}}$$

A kocka felszínét lásd az 5.4.3, a téglatestét lásd, az 5.4.4 meghatározásokban.

6.5.3. meghatározás (Térfogat)

Ha egy kocka minden oldala 1 hosszúságegység, akkor megállapodás szerint a kocka térfogata 1 térfogategység.

Megjegyzések:

- A térfogat nem lehet negatív.
- Az egybevágó testek térfogata egyenlő.
- Ha egy testet feldarabolunk, akkor a darabok térfogatának összege egyenlő az eredeti test térfogatával.

6.5.4. meghatározás (A hasáb térfogata)

A hasáb térfogata egyenlő az alapterületének és magasságának a szorzatával. Az alapterületet itt is a síkidomoknál tanult képlettel kell kiszámítani. A test magasságát nagy „M” betűvel jelöljük, hogy megkülönböztessük a lapokat alkotó síkidomok magasságától, aminek jele továbbra is kis „m” betű.

A képlet tehát:

$$V = T \cdot M$$

ahol T a hasáb alaplappját alkotó síkidom területe, és M a hasáb testmagassága. Az egyenes hasábok testmagassága megegyezik, az oldalélek hosszával. Nem egyenes hasábra ez nem igaz!

A következő meghatározás a szokásosnál kicsit bonyolultabb...

6.5.5. meghatározás (A henger)

Egy egyenes **hengerfelületet** súrol, ha egy párhuzamos egyenes körül 360° -kal elforgatjuk. Az egyenest a hengerfelület **tengelyének** nevezzük. Ha ezt a hengerfelületet a tengelyre merőleges két síkkal elmetsszük, akkor keletkező testet **egyenest körhengernek** nevezzük. A metsző síkon keletkező két körlap a henger **alaplappja** és **fedőlapja**, a hengerfelület közéjük eső része pedig a **palást**. A palástra illeszkedő, a két síkot összekötő, azokra merőleges egyenesek a henger **alkotói**. Az alaplappok távolsága a henger **magassága**. (Az egyenes körhenger magassága egyenlő az alkotók hosszával. A nem egyenesnél ez nem igaz.) Az alaplapp és a fedőlap körének a középpontja illeszkedik a tengelyre. A hengerfelület **forgásfelület**, az egyenes körhenger **forgástest**.

6.5.6. meghatározás (A henger felszíne)

Az egyenes körhenger felszíne a két alaplapp és a palást területének összege. Tehát két kör területe, és egy téglalapé, aminek az egyik oldala a henger magassága (az alkotó szó miatt, most „ a ” jelöli), a másik a körök kerülete. A szokásos képlettel: $A = 2 \cdot T_{\text{alap}} + T_{\text{palást}}$
Most viszont a bonyolultság miatt érdemes a tanultak szerint részletezni az általános képletet:

$$A = 2 \cdot (r^2 \cdot \pi) + (2 \cdot r \cdot \pi) \cdot a$$

A zárójelben az ismerős képleteket látod: a kör területe és kerülete. Szerintem ezt könnyebb így megjegyezni, de át is rendezhetjük: a tankönyvben így szerepel a $2r\pi$ kiemelése után:

$$A = 2r\pi(r + a)$$

6.5.7. meghatározás (A henger térfogata)

Az egyenes körhenger térfogata, hasonlóan a hasábokhoz, egyenlő az alapterület és a testmagasság szorzatával. $V = T_{\text{alap}} \cdot M$ (A testmagasság az egyenes henger esetében egyenlő az alkotó hosszával, ezért a képletben „ a ”-t írok.)

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot a$$